Sandvikens Kommun

Bessemerskolan

Förberedande matematik

Välkommen till Bessemerskolan

För att lyckas bra i matematik och andra ämnen i gymnasiet så har det visat sig vara viktigt att komma ihåg bråkräkning, potenslagarna, algebra och funktioner från grundskolan. Här är ett häfte där du kan öva på grundläggande uppgifter inom dessa områden innan du kommer till gymnasiet. Första kursen heter matematik 1c.

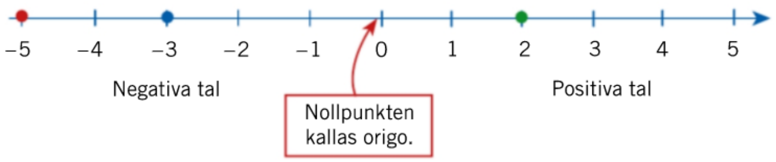
Om du vill veta vad hela kursen matematik 1c innehåller så kan du titta på de sista sidorna i häftet.

Vi ser fram emot att få träffa dig på Bessemerskolan.

Matematiklärarna

Negativa tal

De negativa talen har använts i kinesisk matematik i över 2 000 år och i indisk matematik åtminstone sedan 600-talet. Flera kända europeiska matematiker tyckte så sent som på 1600-talet att tal mindre än noll saknade mening, men när man gjorde affärer betecknade man sedan lång tid tillbaka skulder som något negativt.



Vi jämför de markerade talens storlek på följande sätt

På tallinjen	*Med ord*	*Med symboler*
2 ligger till höger om –3	2 är större än –3	$2 > -3$
–5 ligger till vänster om –3	–5 är mindre än –3	$-5 < -3$

Räkneregler

10 + (–15) = 10 – 15 = –5
10 – (–15) = 10 + 15 = 25

Olika tecken ger minus.

3 · (–4) = –12
(– 10) · 5 = –50
24/(– 8) = –3
(–30)/3 = –10

Lika tecken ger plus.

(–3) · (–1) = 3
10 · 5 = 50
(–24)/(–8) = 3
30/3 = 10

Uppgifter

1142 Sätt ut olikhetstecken, > eller <, mellan talen.

a) 7 3 c) –2 5 e) –2 –5

b) 5 –2 d) 0 5 f) 0 –7

Beräkna 1143–1146 utan räknare. Kontrollera svaren med räknare.

1143 a) 13 + (–8) c) –13 – 2 +1

b) 5 – (–12) d) 40 – 50 · 2

1144 a) 4 · (–7) c) 3 · (–4) · (–4)

b) (–6) · (–9) d) (–5) · (–2) · (–2)

1145 a) (–10) / 2 c) 18 / (–3)

b) (–24) / (–6) d) $\dfrac{(-5)\cdot(-6)}{(-10)}$

1146 a) –4 + (–9) – 6 c) 13+ (–9)/3 – 4

b) $\dfrac{(-24)}{2\cdot(-6)}$ d) 12 – (–4) · 3

1147 Tabellen visar några samband mellan temperaturer i °C (Celsius) och K (Kelvin). Den absoluta nollpunkten är 0 K.

°C (Celsius)	*K (Kelvin)*
20	293
0	273
–100	
	0

Vilka tal ska stå i de tomma rutorna?

1148 Ange temperaturändringen med ett positivt eller negativt tal.

	Starttemperatur	*Sluttemperatur*
a)	+21 °C	+32 °C
b)	+21 °C	+13 °C
c)	–7 °C	+7 °C
d)	–3 °C	–29 °C

1149 Vilket tal ligger mitt emellan

a) 3 och 7 d) –8 och –2

b) –2 och 6 e) –5 och 0

c) –3 och 5 f) –25 och –3?

1150 Sätt in negativa tal i parenteserna så att likheten stämmer.

a) ( ) · ( ) = 32 c) ( ) – ( ) = 8

b) ( ) + ( ) = –10

1151 Beräkna utan räknare $-1 - (-1) \cdot \dfrac{(-1)}{(-1)}$

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Bråkbegreppet

Exempel I en skolklass med 30 elever finns 12 pojkar och 18 flickor.
Förhållandet mellan antalet pojkar och flickor skrivs i enklaste form.

$$\frac{\text{antalet pojkar}}{\text{antalet flickor}} = \frac{12}{18} = \frac{12/6}{18/6} = \frac{2}{3}$$

Förhållandet $\frac{2}{3}$ skrivs ofta som $2:3$. Man säger: "två till tre".

Med andra ord kan man säga att "det går två pojkar på tre flickor".

1201 **Det finns kvicksilveratomer som betecknas Hg-200. I kärnan på en sådan atom finns 200 partiklar: 80 protoner och 120 neutroner.**
Beskriv andelen protoner med ett bråk i enklaste form.

$$\frac{80}{200} = \frac{80/10}{200/10} = \frac{8}{20} = \frac{8/4}{20/4} = \frac{2}{5}$$

Svar: 2/5 av partiklarna är protoner.

1202 **Skriv ett bråk som är hälften så stort som 1/6.**

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{1}{12}$$

Svar: Hälften av 1/6 är 1/12.

1203 **a) Bestäm utan räknare vilket bråk som är störst, $\frac{3}{7}$ eller $\frac{2}{5}$.**

b) Ange ett bråk som ligger mellan $\frac{3}{7}$ och $\frac{2}{5}$.

a) Vi förlänger till samma nämnare (35) för att kunna jämföra talen.

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35} \quad \text{och} \quad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$$

$$\frac{14}{35} < \frac{15}{35} \quad \text{dvs} \quad \frac{2}{5} < \frac{3}{7}$$

b) Vi förlänger bråken i a) med 2 vilket ger $\frac{14}{35} = \frac{28}{70}$ och $\frac{15}{35} = \frac{30}{70}$

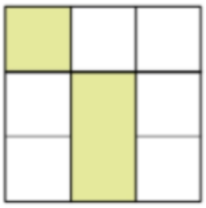
Svar: $\frac{29}{70}$

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

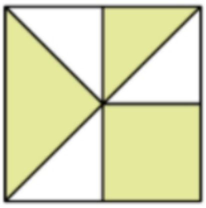
Uppgifter

1204 Hur stor andel är färgad?

a)

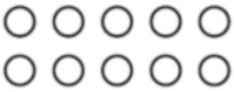


b)

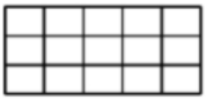


1205 Rita av figurerna och skugga andelen 2/5.

a)



b)



1206 Hur stor del av en timme är:

a) 10 minuter
b) 45 minuter
c) 3 minuter
d) 5 minuter?

1207 Vilka av följande bråk har samma värde?

$\frac{2}{3}$ $\quad \frac{4}{5}$ $\quad \frac{4}{6}$ $\quad \frac{10}{15}$ $\quad \frac{5}{7}$

1208 Förläng bråket 3/8 så att

a) nämnaren blir 24
b) täljaren blir 24.

1209 Ange ett bråk som har samma värde som 2/7 men en nämnare som är

a) 21 b) 56.

1210 Vilket bråk är störst, $\frac{6}{11}$ eller $\frac{13}{22}$? Visa!

1211 En TV kan ha olika förhållanden mellan bredd och höjd på bilden. 4:3 var tidigare standardformat och 16:9 kallas widescreen. Ayla mäter bredden på sin TV till 56 cm och höjden till 42 cm.

Är Aylas TV standard eller widescreen?

Räkna med bråk

På British Museum finns ett för matematiken viktigt dokument, *Rhindpapyrusen*. Den skrevs för nästan 4 000 år sedan och visar bl a hur de gamla egyptierna räknade med bråk. Metoderna har sedan dess utvecklats. Vi repeterar här några metoder/regler som du mött tidigare.

Addition och subtraktion

Vid addition och subtraktion förlänger vi bråken så att de får samma nämnare.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}-\frac{6}{12}=\frac{10+9-6}{12}=\frac{13}{12}$$

blandad form

$\frac{13}{12}$ kan också skrivas $1\frac{1}{12}$ vilket kallas *blandad form.*

Multiplikation

Vid multiplikation av bråk multipliceras täljarna för sig och nämnarna för sig.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad \text{och} \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{1\cdot c}=\frac{a\cdot b}{c}$$

inverterat tal

Man säger att b/a är det *inverterade talet* till a/b.

$\frac{9}{8}$ är det inverterade talet till $\frac{8}{9}$. Observera att $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{8}=1$

Division

Att dividera med ett bråk ger samma resultat som att multiplicera med bråkets inverterade tal.

Vi kan visa detta genom att förlänga med det inverterade talet vilket gör att nämnaren blir 1.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}}{\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{8}}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}}{1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{27}{32}$$

$$\boxed{\frac{3}{4}\Big/\frac{8}{9}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}}$$

$$5\Big/\frac{4}{7}=5\cdot\frac{7}{4}=\frac{35}{4}=8\frac{3}{4}$$

Exempel

1221 Beräkna

a) $\frac{7}{30}+\frac{11}{30}-\frac{13}{30}$ b) $1-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$

a) $\frac{7}{30}+\frac{11}{30}-\frac{13}{30}=\frac{7+11-13}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

b) $1-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 15}{15}-\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{15}{15}-\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{15-6+5}{15}=\frac{14}{15}$

1222 Förklara varför $2\cdot\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

Omvandla: $2\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

Förväxla inte $2\cdot\frac{2}{7}$ med $2\frac{2}{7}$ som betyder $2+\frac{2}{7}$

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

1223 **Beräkna**

a) $\frac{2}{3}$ av $\frac{5}{16}$ b) $\frac{2}{3}$ av 300 kr

a) $\frac{2}{3}$ av $\frac{5}{16} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{16}_{8}} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{5}{24}$

Vi förkortar före multiplikationen.

b) $\frac{2}{3}$ av 300 kr $= \frac{2 \cdot 300}{3}$ kr $= 200$ kr.

Vi delar beloppet i 3 delar och tar 2 av dessa.

1224 **Hur många tredjedelar går det på 4 hela, dvs vad blir $4 \Big/ \frac{1}{3}$?**

Med resonemang: Hur många tredjedelar "får plats" i 4 hela? Svar: 12.

Med beräkning: $4 \Big/ \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{3}{1} = 12$

1225 **Beräkna a) $\frac{3}{4} \Big/ \frac{6}{5}$** **b) $\frac{4}{5} \Big/ 2$**

a) $\frac{3}{4} \Big/ \frac{6}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}$

b) Hälften av 4/5 är 2/5.

Med beräkning: $\frac{4}{5} \Big/ 2 = \frac{4}{5} \Big/ \frac{2}{1} = \frac{\cancel{4}^{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{2}{5}$

Uppgifter

Beräkna 1226–1229 utan räknare.

1226 a) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{11}{18} - \frac{5}{18}$ d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + 2$

1227 a) $5 \cdot \frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7}$

b) $\frac{4}{9} \cdot 2$ d) $\frac{5}{11} \cdot \frac{8}{9}$

1228 a) $\frac{2}{9} \Big/ \frac{3}{5}$ c) $\frac{12/13}{6}$

b) $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

1229 a) $4 - \frac{3}{5}$ c) $\frac{15}{32} \cdot \frac{28}{75}$

b) $\frac{3}{5} \Big/ 8$ d) $4 \Big/ \frac{4}{3}$

1230 Förklara varför $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Positiva heltalsexponenter

Additionen $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ kan vi skriva $7 \cdot 2$.
Även en upprepad multiplikation kan skrivas på ett kortare sätt.

potens
exponent

För produkten $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ inför vi skrivsättet 2^7.
2^7 kallas en *potens* med *basen* 2 och *exponenten* 7.
2^7 utläses ”två upphöjt till sju” eller ”sjunde potensen av två”.

Exponent

$$2^7$$

Bas

Potens

1301 **Tolka potenserna och förenkla.**

a) $2^3 \cdot 2^4$ **b)** $(2^3)^4$ **c)** $\dfrac{3^5}{3^2}$ **d)** $(5 \cdot a)^3$

a) $2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{3 faktorer}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 faktorer}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{7 faktorer}} = 2^7$

Vi kan direkt skriva $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

b) $(2^3)^4 = (2^3) \cdot (2^3) \cdot (2^3) \cdot (2^3) = 2^{12}$

Vi kan direkt skriva $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

c) $\dfrac{3^5}{3^2} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3^3$ **(förkortning två gånger med faktorn 3)**

Vi kan direkt skriva $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

d) $(5 \cdot a)^3 = (5 \cdot a) \cdot (5 \cdot a) \cdot (5 \cdot a) = 5^3 \cdot a^3$

Vi kan direkt skriva $(5 \cdot a)^3 = 5^3 \cdot a^3$

Om x och y är positiva heltal så kan vi tydligen formulera följande allmänna regler:

Potenslagarna

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$		**multiplikationsregeln**
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$		**regeln för potens av en potens**
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	om $a \neq 0$	**divisionsregeln**
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$		**regeln för potens av en produkt**

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Uppgifter

1302 Skriv som en potens med basen 5

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $5 \cdot 5 \cdot 5^{10}$

1303 Förklara vad potensen betyder och beräkna dess värde utan att använda räknare.

a) 3^4 b) 4^3

1304 Förenkla, dvs skriv som en potens

a) $5^2 \cdot 5^4$ c) $3^5 \cdot 3^8$

b) $\frac{10^{15}}{10^{12}}$ d) $\frac{a^9}{a^5}$

1305 Förenkla

a) $4^5/4$ b) $(a^4)^2$

1306 Förenkla

a) $10 \cdot (10^3)^2$ b) $10^6 \cdot 10^8/10^2$

1307 Beräkna, först utan och sedan med räknare.

a) $10^3 + 10^2$ c) $3^2 - 2^3$

b) $3^3 + (6-4)^2$ d) $(-1)^2 - 1^3$

1308 Förenkla

a) $(4 \cdot a)^2$ b) $(10x)^3$

1309 Vilket värde har x?

a) $2^x \cdot 2^3 = 2^7$ c) $2^x / 2^6 = 2^{10}$

b) $(2^x)^5 = 2^{15}$ d) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^x = 2^{13}$?

1310 Förenkla

a) $(4m)^3 \cdot m^2$ b) $(-3x)^3 \cdot (-2x)^4$

1311 Förenkla

a) $6^x / 6$ c) $(6 \cdot 6^x)^2$

b) $6 \cdot 6^x \cdot 6^x$ d) $(6x^3y^2)^3$

Algebraiska uttryck och förenklingar

Vi kan förenkla eller skriva om algebraiska uttryck genom att:

1 Föra samman termer av samma slag

$4x - 2 + 3y + 5 - x = 3x + 3y + 3$

Vi förenklar de olika variabeltermerna för sig och siffertermerna för sig.

$1{,}6ab - 0{,}6ba = 1{,}6ab - 0{,}6ab = 1ab = ab$

Obs! $ab = ba$

2 Ta bort parenteser

$4x + (3x - 2) = 4x + 3x - 2 = 7x - 2$

+ före parentes
Ta bort parentesen utan att ändra något.

$4x - (3x - 2) = 4x - 3x + 2 = x + 2$

– före parentes
Ta bort parentesen och ändra tecken för alla termer i parentesen.

3 Multiplicera in en faktor

$3(x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$

$x(2x - 5y) = x \cdot 2 \cdot x - x \cdot 5 \cdot y = 2x^2 - 5xy$

Multiplicera *varje* term i en parentes med den faktor som står framför parentesen.

3121 **Förenkla**

a) $3a^2 + 4a - 5 + a^2 - 3a + 8$

b) $(4x - 8) - (x + 2)$

c) $2(3x + 5) - (x - 2)$

d) $4a^2 - a(a + 1)$

a) $3a^2 + 4a - 5 + a^2 - 3a + 8 = 3a^2 + a^2 + 4a - 3a - 5 + 8 = 4a^2 + a + 3$

b) $(4x - 8) - (x + 2) = 4x - 8 - x - 2 = 3x - 10$

c) $2(3x + 5) - (x - 2) = 6x + 10 - x + 2 = 5x + 12$

d) $4a^2 - a(a + 1) = 4a^2 - a^2 - a = 3a^2 - a$

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Uppgifter

3123 Förenkla

a) $4x + 3x + 6 - 2$ c) $3x - 1 - x + 4$

b) $5a + 10 - 3a - 9$ d) $6a + 3 - a - 8$

3124 Ta bort parentesen och förenkla

a) $10 + (x - 1)$ c) $(x + 4) - 3$

b) $10 - (x - 1)$ d) $3 - (x + 2)$

3125 Förenkla

a) $4(x + 1) + 7(2 + 2x)$

b) $t^2 - t + 4t^2 - 7t - 9$

3126 Förenkla

a) $6x + 2(x - 1) + 5$ b) $6x - 2(x - 1) + 5$

3127 Hur mycket längre är linje A än B?

A ———————— $2{,}5a + 12$ (mm)

B ——— $a + 5$

3128 Beräkna om $x = 3$ värdet på uttrycket $4x - (2x + 7)$

a) före förenkling b) efter förenkling.

3129 Förenkla och beräkna uttryckets värde om $x = 3$ och $y = 2$.

a) $3(x + y) + x - y + 4(x + 2)$

b) $10xy - 4x(x - y)$

3130 Förenkla

a) $\frac{5}{4}a - \frac{a}{2}$ c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a}$

b) $\frac{a}{3} - a$ d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}$

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Ekvationslösning

4 ST GRUNDPRINCIPER

1 *Om man till lika stora adderar lika stora, så blifva summorna lika.*

$x - 10 = 18$

Addera 10 till båda leden och förenkla.

$x - 10 + 10 = 18 + 10$

$x = 28$

2 *Om man från lika stora subtraherar lika stora, så blifva resterna lika.*

$x + 5 = 13$

Subtrahera 5 från båda leden och förenkla.

$x + 5 - 5 = 13 - 5$

$x = 8$

3 *Om man multiplicerar lika stora med lika, så blifva produkterna lika.*

$\frac{x}{4} = 10$

Multiplicera båda leden med 4 och förenkla.

$4 \cdot \frac{x}{4} = 4 \cdot 10$

$x = 40$

4 *Om man dividerar lika stora med lika, så blifva quoterna lika.*

$7x = 56$

Dividera båda leden med 7 och förenkla.

$\frac{7x}{7} = \frac{56}{7}$

$x = 8$

Exempel

Lös ekvationen och kontrollera ditt svar.

a) $1{,}8x - 1{,}5 + 0{,}7x = 6{,}5$ **b)** $\frac{2x}{3} - 1 = 3$ **c)** $7x - 2(x - 3) = 2x$

a) $1{,}8x - 1{,}5 + 0{,}7x = 6{,}5$

Vi börjar med att förenkla vänstra ledet.

$2{,}5x - 1{,}5 = 6{,}5$

$2{,}5x - 1{,}5 + 1{,}5 = 6{,}5 + 1{,}5$

$2{,}5x = 8$

$\frac{2{,}5x}{2{,}5} = \frac{8}{2{,}5}$

$x = 3{,}2$

Kontroll: VL = $1{,}8 \cdot 3{,}2 - 1{,}5 + 0{,}7 \cdot 3{,}2 = 6{,}5$ och HL = $6{,}5$ dvs $3{,}2$ är en lösning.

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

b) $\dfrac{2x}{3} - 1 = 3$

$\dfrac{2x}{3} - 1 + 1 = 3 + 1$

Vi börjar med att addera 1 till båda leden.

$\dfrac{2x}{3} = 4$

$\dfrac{2x \cdot 3}{3} = 4 \cdot 3$

$2x = 12$

$x = 6$

Kontroll: $VL = \dfrac{2 \cdot 6}{3} - 1 = 3$ **och** $HL = 3$

dvs $x = 6$ **är en lösning.**

c) $7x - 2(x - 3) = 2x$

$7x - (2x - 6) = 2x$

$7x - 2x + 6 = 2x$

Obs! Teckenbyte.

$5x + 6 = 2x$

$5x + 6 - 2x = 2x - 2x$

$3x + 6 = 0$

$3x + 6 - 6 = 0 - 6$

$3x = -6$

$x = -2$

Kontroll: $VL = 7 \cdot (-2) - 2(-2 - 3) = -14 + 10 = -4$

och $HL = 2 \cdot (-2) = -4$

Uppgifter

3224 Lös ekvationerna

a) $3x + 5 = 26$

b) $3{,}5y - 6{,}2 = 7{,}8$

c) $17 = 5 + 4x$

d) $45{,}1 = 11m - 4{,}4$

3225 Lös ekvationerna och kontrollera ditt svar.

a) $3x - x + 1 = 19$

b) $x - 0{,}4x = 72$

c) $2x - 7 + 3x + 2 = 11$

d) $5 = x + 0{,}2x + 23$

3226 Lös ekvationerna

a) $\dfrac{x}{3} = 8$

b) $\dfrac{2m}{5} = 10$

c) $12 = \dfrac{3b}{4}$

d) $\dfrac{x}{-6} = 7$

3227 Lös ekvationerna

a) $\dfrac{x}{2{,}5} + 32 = 80$

b) $13 = 5{,}2 + \dfrac{y}{0{,}2}$

c) $\dfrac{5x}{4} - 10 = 25$

d) $12 = \dfrac{20 - 4y}{3}$

3228 Lös ekvationerna och kontrollera ditt svar.

a) $5(4x + 1) = 45$

b) $3(5 - 2x) = 27$

c) $144 = 12(5 - 14k)$

d) $10 = 0{,}1(4 + 16a)$

3229 Lös ekvationerna

a) $9x - 4 = 6x + 11$

b) $16 - 3x = 4x - 5$

c) $0{,}5x + 6 = 10 - 2x$

d) $2{,}5x = \dfrac{72 + 6{,}8x}{2}$

Funktioner

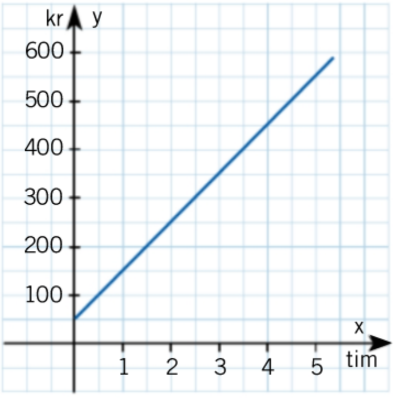
Linjära modeller

Diagrammet visar kostnaden y kr att hyra en vindsurfingbräda x timmar.

I grafen kan vi t ex avläsa att:

- den fasta kostnaden är 50 kr
- kostnaden för 1 timme är 150 kr
- kostnaden för 2 timmar är 250 kr
- den rörliga kostnaden är 100 kr per timme.

Funktionen $y = 50 + 100x$ är en linjär modell som beskriver kostnaden.



Linjära modeller

Funktioner av typen $y = kx + m$, där k och m är konstanter används för att beskriva linjära modeller.

Grafen är en rät linje.

k-värdet är ett mått på linjens lutning och anger hur mycket linjen ändras (stiger eller faller) då vi går en enhet åt höger i x-led.
Funktionen i exemplet ovan har $k = 100$.

m-värdet är skärningen med y-axeln och kan ofta ses som ett startvärde.
I exemplet ovan är $m = 50$.

Om $m = 0$ får vi en proportionalitet, $y = kx$.

linjär funktion

I matematikkurserna på gymnasiet brukar funktioner av typen $y = kx + m$ kallas för *linjära funktioner*. Detta är praktiskt, eftersom grafen är en rät linje, men det är inte matematiskt korrekt.

Definitionen av begreppet linjär funktion (som används på högskolenivå) innebär bl a att $y = kx + m$ är en linjär funktion endast då $m = 0$.

Exempel

6228 **Höjden y cm av en planta kan under en period beskrivas med den linjära modellen $y = 4{,}5 + 0{,}5x$ där x är tiden i dygn.**

a) Vad betyder värdet 4,5 i formeln?

b) Vad betyder värdet 0,5 i formeln?

a) $x = 0$ ger $y = 4{,}5$
Plantan var 4,5 cm lång när mätningarna började.

b) För varje dygn ökar plantans längd med 0,5 cm.
Plantan växer alltså med hastigheten 0,5 cm/dygn.

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

6229 **En fallskärmshoppare befinner sig på höjden 500 m när fallskärmen är utvecklad. Hopparen sjunker med en konstant hastighet av 5 m/s.**

Sätt höjden till y m och tiden till x s.

a) Ange den funktion som visar hur y beror av x.

b) Beräkna hur lång tid det tar innan hopparen når marken.

c) Gör en värdetabell med början då $x = 0$ och rita grafen.

d) Beskriv och förklara grafens utseende.

a) På x s minskar höjden y med $5x$ m.
$y = 500 - 5x$

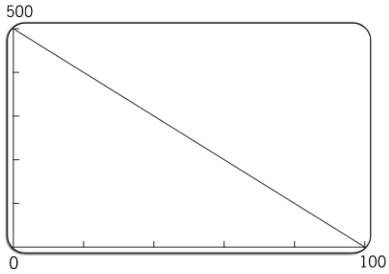
b) Hopparen når marken då $y = 0$ vilket ger

$0 = 500 - 5x$
$x = 500/5$
$x = 100$ dvs efter 100 s når hopparen marken

c) Tabell med exempelvis steg 20.

x	0	20	40	60	80	100
y	500	400	300	200	100	0

Vi väljer fönsterinställning:
I x-led 0 till 100 med $X_{scl} = 20$.
I y-led 0 till 500 med $Y_{scl} = 100$.



d) Grafen är en rät linje eftersom höjden hela tiden minskar lika mycket. y-värdet är 500 då $x = 0$, eftersom höjden från början är 500 m. Linjen faller eftersom höjden minskar med 5 m varje sekund.

Uppgifter

6230 Vid en prognos för folkmängden y i en kommun använde man modellen $y = 55\,000 + 400x$, där x är tiden i år.

a) Beräkna folkmängden efter 10 år.

b) Vad betyder värdet 55 000 i formeln?

c) Vad betyder värdet 400 i formeln?

6231 Kostnaden y kr att hyra en cykel x timmar beskrivs av funktionen $y = 50 + 30x$.

a) Gör en värdetabell för $x = 2, 4, 6, 8$.

b) Rita grafen för hand.

c) Avläs i grafen hur många timmar du kan hyra cykeln för 200 kr.

6232 En elektriker tar 350 kr för ett hembesök plus 250 kr för varje timme som arbetet tar. Sätt den totala kostnaden till y kr och arbetstiden till x h.

a) Vad blir kostnaden y om arbetstiden x är 4 h?

b) Ange den funktion som visar hur y beror av x.

c) Gör en värdetabell för $x = 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ \ldots;\ 3$.

d) Rita en graf som visar hur y beror av x och beskriv grafens utseende.

6233 Tabellen definierar en funktion $y = kx+m$.

x	2	3	4	5	6	7
$y = f(x)$	9	13	17	21	?	29

a) Vad är y när $x = 6$?

b) Förklara i ord hur du får y när du vet x.

c) Skriv en funktionsregel algebraiskt.

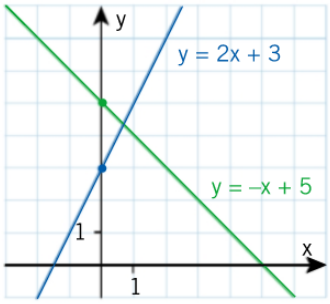
d) Bestäm $f(100)$.

Räta linjens ekvation $y = kx + m$

Exempel Grafen till en funktion av typen
$y = kx + m$, där k och m är konstanter,
är alltid en rät linje.

Vi ritar funktionerna
$y = 2x + 3$ $\quad k = 2$ och $m = 3$
$y = -x + 5$ $\quad k = -1$ och $m = 5$

Vilken betydelse har k och m för grafens utseende?



Vad betyder m? I den punkt där linjen skär y-axeln är $x = 0$.
Om $x = 0$ kan $y = kx + m$ skrivas $y = k \cdot 0 + m$. Vi får $y = m$.
Vi kan alltså avläsa värdet på m där linjen skär y-axeln.

Vad betyder k? Vi undersöker hur y-värdet ändras då x-värdet ökar med 1.

$y = 2x + 3$

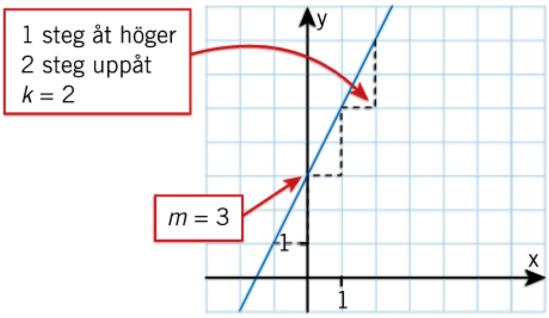
x	0	1	2	3	4
y	3	5	7	9	11

Om x-värdet ökar med 1, ökar y-värdet med 2.

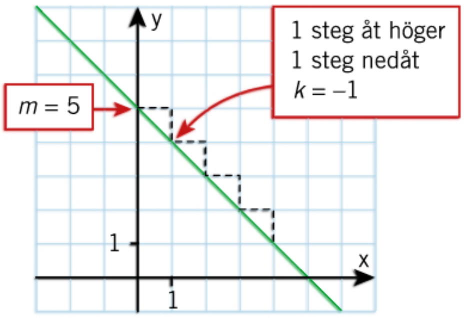
$y = -x + 5$

x	0	1	2	3	4
y	5	4	3	2	1

Om x-värdet ökar med 1, minskar y-värdet med 1.



$k = 2$ och linjen *stiger*.



$k = -1$ och linjen *faller*.

k är ett mått på linjens lutning och anger hur mycket linjen ändras (stiger eller faller) för varje enhet vi går framåt i x-led.
Om k är positivt stiger linjen. Om k är negativt faller linjen.

Räta linjens ekvation

$y = kx + m$ kallas räta linjens ekvation. $k = \dfrac{\text{ändringen i } y\text{-led}}{\text{ändringen i } x\text{-led}}$
och m är där linjen skär y-axeln.

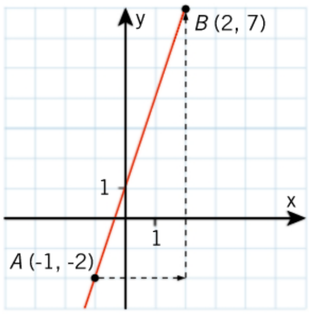
Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Exempel

6238 **Bestäm på formen $y = kx + m$ ekvationen för en rät linje genom punkterna**

a) $A\ (-1, -2)$ och $B\ (2, 7)$ **b) $A\ (1, 3)$ och $B\ (5, 1)$.**

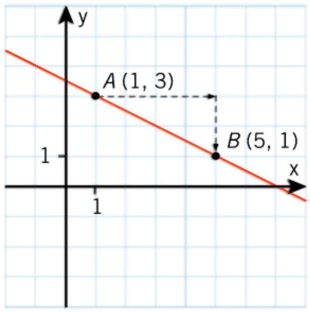
a)



$$k = \frac{\text{ändringen i } y \text{ från } A \text{ till } B}{\text{ändringen i } x \text{ från } A \text{ till } B} = \frac{9}{3} = 3$$

sätt in k:	$y = 3x + m$
välj en punkt:	$x = 2$ ger $y = 7$
sätt in:	$7 = 3 \cdot 2 + m$
beräkna m:	$7 = 6 + m$ ger $m = 1$
	$y = 3x + 1$

b)



$$k = \frac{\text{ändringen i } y \text{ från } A \text{ till } B}{\text{ändringen i } x \text{ från } A \text{ till } B} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$$

$y = -0{,}5x + m$

$x = 1$ ger $y = 3$

$3 = -0{,}5 \cdot 1 + m$

$3 = -0{,}5 + m$ ger $m = 3{,}5$

$y = -0{,}5x + 3{,}5$

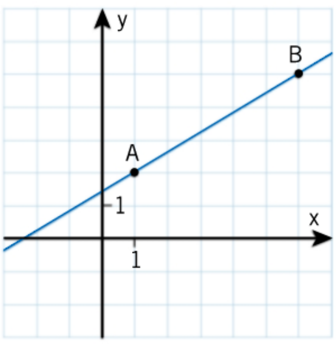
Uppgifter

6239 Ange k och m för linjerna

a) $y = 5x - 6$ b) $y = -3x + 7$

6240 Förklara vad det betyder för grafen att funktionen $y = kx + m$ har $k = 3$ och $m = -2$.
Rita grafen utan att använda räknare.

6241



Studera figuren och beräkna

a) ändringen i x från A till B

b) ändringen i y från A till B

c) linjens lutning k.

6242 Linjen $y = 4x + m$ går genom punkten (2, 14). Beräkna värdet på m.

6243 Skriv om ekvationen på formen $y = kx + m$

a) $2x + y - 8 = 0$ b) $3x - 2y + 6 = 0$

6244 En linje går genom punkterna A (10, 725) och B (110, 525). Beräkna

a) ändringen i x från A till B

b) ändringen i y från A till B

c) linjens lutning k.

6245 Bestäm på formen $y = kx + m$ ekvationen för en linje som går genom punkterna

a) (1,–1) och (4, 2) b) (1, 5) och (3,–3)

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Facit

1142 a) $7 > 3$ d) $0 < 5$
b) $5 > -2$ e) $-2 > -5$
c) $-2 < 5$ f) $0 > -7$

1143 a) 5 c) –14
b) 17 d) –60

1144 a) –28 c) 48
b) 54 d) –20

1145 a) –5 c) –6
b) 4 d) –3

1146 a) –19 c) 6
b) 2 d) 24

1147 173 och –273

1148 a) +11 °C c) +14 °C
b) –8 °C d) –26 °C

1149 a) 5 d) –5
b) 2 e) –2,5
c) 1 f) –14

1150 a) T ex $(-4) \cdot (-8) = 32$
b) T ex $(-4) + (-6) = -10$
c) T ex $(-4) - (-12) = 8$

1151 0

1204 a) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{8}$

1205 a)  b) 

1206 a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{20}$
b) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{12}$

1207 2/3 = 4/6 = 10/15

1208 a) 9/24 b) 24/64

1209 a) 6/21 b) 16/56

1210 b) $\frac{13}{22} > \frac{6}{11} = \frac{12}{22}$

1211 Standard.
Motivering:
56 /42 kan t ex förkortas först med 2 och sedan med 7.

1226 a) 6/7 c) 1/6
b) 6/18 = 1/3 d) 35/12
Ledtråd d):
2 = 2/1 = 24/12

1227 a) 5/6 c) 3/7
b) 8/9 d) 40/99

1228 a) 10/27 c) 2/13
b) 4/21 d) 2/3

1229 a) 17/5 c) 7/40
b) 3/40 d) 3

1230 *Förklaring:*
$$2\frac{3}{5} = \frac{2}{1} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

1302 a) 5^6 b) 5^{12}

1303 a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
b) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

1304 a) 5^6 c) 3^{13}
b) 10^3 d) a^4

1305 a) 4^4 b) a^8

1306 a) 10^7 b) 10^{12}

1307 a) 1 100 c) 1
b) 31 d) 0

1308 a) $16a^2$ b) $1\,000x^3$

1309 a) $x = 4$ c) $x = 16$
b) $x = 3$ d) $x = 9$

1310 a) $64m^5$ b) $-432x^7$

1311 a) 6^{x-1} c) $36 \cdot 6^{2x}$ eller 6^{2x+2}
b) 6^{1+2x} d) $216x^9y^6$

3123 a) $7x + 4$ c) $2x + 3$
b) $2a + 1$ d) $5a - 5$

3124 a) $9 + x$ c) $x + 1$
b) $11 - x$ d) $1 - x$

3125 a) $18x + 18$
b) $5t^2 - 8t - 9$

3126 a) $8x + 3$ b) $4x + 7$

3127 $1{,}5a + 7$ (mm)
Ledtråd:
Beräkna $2{,}5a + 12 - (a + 5)$

3128 a) –1 b) –1

3129 a) Uttrycket kan förenklas till $8x + 2y + 8$. Värdet är 36.
b) Uttrycket kan förenklas till $14xy - 4x^2$. Värdet är 48.

3130 a) $\frac{3a}{4}$ c) $\frac{2}{a}$
b) $-\frac{2a}{3}$ d) $\frac{3}{2a}$

3224 a) $x = 7$ c) $x = 3$
b) $y = 4$ d) $m = 4{,}5$

3225 a) $x = 9$ c) $x = 3{,}2$
b) $x = 120$ d) $x = -15$

3226 a) $x = 24$ c) $b = 16$
b) $m = 25$ d) $x = -42$

3227 a) $x = 120$ c) $x = 28$
b) $y = 1{,}56$ d) $y = -4$

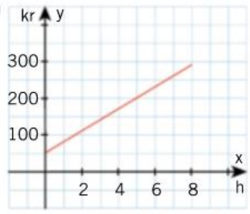
3228 a) $x = 2$
Kontroll:
$VL = 5(4 \cdot 2 + 1) = 45 = HL$
b) $x = -2$
Kontroll:
$VL = 3(5 - 2 \cdot (-2)) = 3 \cdot 9 =$
$= 27 = HL$
c) $k = -0{,}5$
Kontroll:
$HL = 12(5 - 14 \cdot (-0{,}5)) =$
$= 12 \cdot 12 = 144 = VL$
d) $a = 6$
Kontroll:
$HL = 0{,}1(4 + 16 \cdot 6) =$
$= 0{,}1 \cdot 100 = 10 = VL$

3229 a) $x = 5$ c) $x = 1{,}6$
b) $x = 3$ d) $x = -40$

6230 a) 59 000
b) Vid prognosens början ($x = 0$) är folkmängden 55 000.
c) Folkmängden ökar med 400 invånare per år.

6231 a)

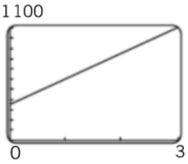
x	2	4	6	8
y	110	170	230	290

b) 

c) 5 timmar

6232 a) 1 350 kr
b) $y = 250x + 350$
c)

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	475	600	725	850	975	1 100

d) 1 100


Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

6233 a) $y = 25$

b) Jag multiplicerar x med fyra och adderar produkten med ett.

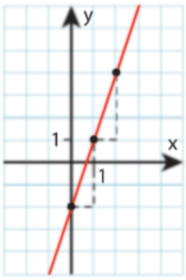
c) $y = 4x + 1$

d) $f(100) = 401$

6239 a) $k = 5,\ m = -6$

b) $k = -3,\ m = 7$

6240 $k = 3$ betyder att linjen stiger 3 enheter då vi går fram 1 enhet i x-led.
$m = -2$ betyder att linjen skär y-axeln i punkten $(0, -2)$.



6241 a) 5 c) $k = 3/5 = 0{,}6$

b) 3

6242 $m = 6$

Ledtråd:
Sätt in $x = 2$ och $y = 14$ i $y = 4x + m$ och beräkna m.

6243 a) $y = -2x + 8$

b) $y = 1{,}5x + 3$

6244 a) 100 b) -200 c) $k = -2$

6245 a) $y = x - 2$

Ledtråd:
Beräkna först k. Sätt sedan in k-värdet samt x- och y-värdet för en av punkterna i $y = kx + m$.

b) $y = -4x + 9$

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Matematik 1c

Innehåll

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000

Källa: Matematik 5000, förlag NATUR & KULTUR, www.nok.se/matematik5000